EXERCISE FOUR

作业*6/5*课堂交。上机作业交电子版*6/10*前到邮箱。 带***题本科生选做，研究生必做。

1. 给出离散傅立叶变换的逆矩阵F_N,证明其可用离散傅立叶变换D_N计算。

   (1) $F_N(\vec{x}(n)) = D_N \cdot \vec{x}(N-n)/N$, $\vec{x}(N-n)$是输入信号的逆排列;

   (2) $F_N(\vec{x}) = (D_N \cdot \vec{x}^*)^*/N$, 其中*是复共轭;

   (3) $F_N(\vec{x}) = swap(D_N \cdot swap(\vec{x}))/N$，其中$swap(a+bi) = b+ai$，即交换虚部和实部。

2. (1) 给定信号$x(n)$, 连续做四次DFT后的结果是什么？ 考察D_N^4.

   (2) (***)试给出D_{16}的基为4的一步矩阵分解(即一步基为4的FFT算法).

3. (1) 证明：傅立叶变换矩阵的行向量$c_k = \{W_N^{kj}, j = 0, 1, \ldots, N-1\}$是所有$N$阶循环矩阵的特征向量， 其中$W_N = e^{-i2\pi/N}$,计算行向量的长度。

   (2)给定以下二阶差分矩阵A_2,证明DCT2的所有行向量$c_k = \{\cos(j + 1/2)k\pi/N, j = 0, 1, \ldots, N-1\}$是其特征向量并计算行向量的长度。

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \cdots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \cdots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

   （3）*** DCT4的所有行向量$c_k = \{\cos(j+1/2)(k+1/2)\pi/N, j = 0, 1, \ldots, N-1$是以上矩阵$A_4$的特征向量。 给出$A_4$的第一行和最后一行的计算方法。(给出对应的边界条件并计算).

4. 利用z变换给出再抽样运算的频率响应。$(\uparrow 2)(\downarrow 2)(e^{iw}) = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{i(w+\pi)})$ 及$(\downarrow 2)(\uparrow 2)(e^{iw}) = e^{iw}$.

5. 验证hat函数(三角波)是尺度方程$\phi(t) = 2\sum_{k=0}^{L} h_0(k)\phi(2t-k)$的解。其中$h_0 = (1/4, 1/2, 1/4)$.

   ***说明:一般的B样条函数都是其解。

6. 给定Daubechies乘积滤波器$P_0(z) = \frac{1}{16}(-1 + 9z^{-2} + 16z^{-3} + 9z^{-4} - z^{-6})$。

   (1)验证其满足PR条件(完全重构),求出其六个零点。

   (2)试给出一个4/4滤波器组的h_0, f_0表达式；(Daubechies小波)

   (3)试给出一个6/2滤波器组的h_0, f_0表达式；

   (4)试给出一个5/3滤波器组的h_0, f_0表达式；

7. 证明：Household 变换: $H = I - 2uu^\tau$是正交矩阵，说明其是以u为法向量的平面进行反射的矩阵变换。

8. 证明以下矩阵逆的公式: 设M,A,W是$n\times n$矩阵,U,V是维数为$n\times m, m\times n$的矩阵， u,v是$n\times 1, 1\times n$的向量。I是恒同矩阵。

   (a)$M=I-uv$,$M^{-1}=I+uv/(1-vu)$

   (b)$M=I-UV$,$M^{-1}=I_n+U(I_m-VU)^{-1}V$

   (c)***$M=A-UW^{-1}V$,$M^{-1}=A^{-1}+A^{-1}U(W-VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$ Woodbury-Morrison 公式。

上机作业MATLAB

要求提交一个M文件(可直接执行)和一个所有结果的说明文件。

1. (FFT和卷积)

   A: (有限信号生成） 给定一段长度为N的信号，比较以下不同延拓方法得到的信号的谱。(fft)

   直接周期延拓(长度为N)，加零（长度为$2N$)，对称延拓（全样本$2N-1$)；对称延拓（半样本$2N$)；

   B:自己编写两个相同长度N序列的循环卷积程序。并与利用MATLAB$fft,ifft$实现循环卷积的方法比较运行时间。

   C:利用加零法实现两个相同长度N序列的一般卷积：每个序列加$N-1$个零，再用B中的循环卷积即可。 比较MATLAB中的conv的结果和运行时间；

   D:(***) 试用FFT变换真实图像，然后选取一部分傅立叶系数(一个小矩阵或大的数值？),再用ifft变换看图像是什么。 如何选取子矩阵?

2. (DCT2变换)

   A:给出$N=8$的DCT2的8×8矩阵的八个基向量(行向量)，画出其基向量以及其傅立叶变换向量。

   B试验DCT压缩。选取一个256×256或合适大小图像，利用MATLAB的DCT2函数变换，适当压缩系数，再用IDCT2恢复，比较图像差异。

   注记：可以选取左上角的方阵，其余元素变零。 或者保留较大系数，将较小系数置零。

   C(***)试验JPEG压缩。选取一个256×256或合适大小图像，分割图像成为8×8的小块，每块进行DCT2变换，请适当压缩每一个8×8子矩阵，再用IDCT2恢复，比较图像。

   注记：标准jpg压缩将改变图像灰度范围到比如$[-128,127]$,除以标准压缩矩阵改变每个8×8子矩阵，结果取整，再 取逆，请参考相关文献。

3. (小波函数)利用附件(ex4.m)中cascade.m函数计算以下小波的尺度函数。

   A: 直接给出Daubechies小波的尺度函数。

   B: 利用习题6中结果，给出5/3,6/2小波的尺度函数。

   C: 取$h=(1/4,1/2,1/4)$,$h=(2/3,1/3)$,给出结果。

4. (矩阵分解)

   A:随机产生矩阵$A_{256\times 256}$.

   B:利用MATLAB函数计算A的LU分解，QR分解，SVD分解。比较计算速度。

   C: ***试用一个图像作为矩阵，求出SVD分解，压缩若干奇异值($\sigma_i < h, \rightarrow \sigma_i = 0$),恢复图像，比较压缩效果!

5. ***(小波变换)参考附件(ex4.m)中D4.m函数编写一个小波变换。

   A: 自己编写一个实现5/3滤波器组的一个小波变换(不迭代)及其逆变换。可以采用周期的边界条件(即选取变换矩阵为循环矩阵). 给出一个测试信号的变换及逆变换结果(比如$sinc$信号).

   注记：如果编程困难，可以直接用D4.m中的4/4滤波器组变换。

   B: 使用A中函数，编程实现迭代的小波变换及逆变换。(迭代参数可选,一般3-5即可).给出一个例子.

   C: (信号压缩)选取一个信号(比如$sinc$信号)，选取合适的方法压缩B中变换后系数(某些置零),并逆变换恢复，比较不同。

   D: (信号去噪)给信号加上随机噪音，使用经典小波硬降噪方法(确定一个阀值δ,小波系数比δ小则置零).比较降噪效果。

   E:(***)(图像压缩降噪) 试用MATLAB小波工具箱中函数对真实图像进行变换，压缩或降噪，恢复，比较图像。